

В.И. Вишняков, П.А. Врунов, С.П. Еркович

## ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ГЛАДСТОНА-ДЕЙЛА И МОЛЕКУЛЯРНОЙ РЕФРАКЦИИ ДЛЯ ВОЗДУХА

Методические указания к лабораторной работе О-3 по курсу общей физики

Под редакцией А.Ф. Наумова

Дан вывод формулы Гладстона-Дейла. Описаны методики измерения постоянной Гладстона-Дейла и рефракции для воздуха. Для студентов 2-го курса всех специальностей МГТУ.

Цель - изучение интерференционного рефрактометра, ознакомление с классической теорией дисперсии света и выявление связи феноменологической теории Максвелла с теорией атомного строения вещества, определение постоянной Гладстона-Дейла и молекулярной рефракции для воздуха.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Опыт показывает, что фазовая скорость распространения гармонической световой волны в веществе зависит от её частоты  $\omega$ . Фазовая скорость света в среде  $v$  связана с показателем преломления этой среды  $n$  соотношением  $n=c/v$  (где  $c$  - скорость света в вакууме). Следовательно, и показатель преломления среды зависит от частоты, т.е.  $n=n(\omega)$ . Это явление называется дисперсией света.

Механизм возникновения дисперсии света может быть выяснен на примере распространения света в среде, состоящей из неполярных молекул, в которых электроны удерживаются в положении равновесия квазиупругими силами. Такая среда поляризуется в электрическом поле. При этом вектор поляризованности  $\vec{P}$ , равный электрическому дипольному моменту единицы объёма среды, пропорционален напряжённости поля  $\vec{E}$ , вызывающей поляризацию

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная;  $\chi$  - диэлектрическая восприимчивость;  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды.

Если концентрация молекул  $N$ , а их средняя поляризуемость  $\alpha$ , то поляризованность среды можно представить как

$$\vec{P} = N \epsilon_0 \alpha \vec{E}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим выражение для диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости:

$$\chi = \epsilon - 1 = N \alpha. \quad (3)$$

В свою очередь, (3) даёт зависимость средней поляризуемости от  $\epsilon$  и  $N$ , или (если воспользоваться соотношением Максвелла  $\epsilon = n^2$ ) от  $n$  и  $N$ , а именно

$$\alpha = \frac{1}{N} (\epsilon - 1) = \frac{1}{N} (n^2 - 1). \quad (4)$$

Для газа (воздуха)  $n$  близко к единице, т.е.  $\epsilon - 1 = n^2 - 1 = 2(n - 1)$ . Тогда из (4) получим выражение

$$(n - 1) = \frac{1}{2} N \alpha \quad (5)$$

Соотношение (4) в более общем виде для конденсированной диэлектрической среды, в которой на каждую частицу внешнее поле воздействует не только непосредственно, но и через изменение внутренних полей, создаваемых окружением частицы, было получено независимо и практически одновременно двумя учёными – Лорентцом и Лоренцом:

$$\alpha = \frac{\epsilon}{N} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{3}{N} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (6)$$

Это соотношение выражает связь между феноменологической теорией Максвелла и теорией атомно-молекулярного строения вещества. Вместо средней поляризованности  $\alpha$  часто используют другую величину ( $R$ ), называемую молекулярной рефракцией (в случае одноатомных веществ она называется атомной рефракцией). Это, по существу, полная поляризованность вещества, определяемая как

$$R = \frac{1}{3} N_A \alpha. \quad (7)$$

Здесь  $N_A$ -число Авогадро.

Выразим концентрацию  $N$  через молярную массу  $\mu$  и плотность  $\rho$

$$N = N_A \frac{\mu}{\rho}.$$

Тогда из (6) молекулярную рефракцию можно представить в виде

$$R = \frac{N}{\rho} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$$

Для газа ( $n^2 \approx 1$ )

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} (n - 1). \quad (8)$$

Поляризация неполярного диэлектрика определяется двумя факторами:

- 1) поляризацией молекулы, т.е. величиной наведённого дипольного момента;
- 2) ориентацией этих моментов внешним полем.

Учитывая эти факторы, полную поляризованность можно представить как

$$\alpha = \alpha_{эл} + \alpha_{ор}$$

где  $\alpha_{эл}$  – электронная поляризуемость, которая определяется электрической структурой молекулы, учитывает первый фактор;  $\alpha_{ор}$  - ориентационная поляризуемость которая зависит от температуры (изменяясь обратно пропорционально ей – закон Кюри), учитывает второй фактор.

Если температура постоянная, то  $\alpha = const$ , и  $R$  не зависит от плотности газа, т.е.  $n-1$  и  $\rho$  пропорциональны друг другу, как это следует из формулы (8). Это подтверждается экспериментальными данными, которые показывают, что молекулярная рефракция остаётся практически постоянной и при конденсации газа в жидкость. Формула (8), выраженная в виде

$$n - 1 = K\rho \quad (9)$$

называется соотношением Гладстона-Дейла.

Здесь

$$K = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\mu}$$

- постоянная Гладстона-Дейла (для разных газов различна). Она практически не зависит от температуры и давления и мало зависит от длины волны света

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$$

Зависимость молекулярной рефракции (и постоянной  $K$ ) от длины волны света (или частоты) обусловлена дисперсией. В переменном поле световой волны диэлектрик следует рассматривать как систему нежестких диполей. Для простоты каждый из них будем считать образованным колебаниями одного внешнего электрона в атоме или молекуле. В принятой нами модели эти колебания будут рассматриваться на основе классической механики.

Составим уравнение движения для связанного электрона, пренебрегая действием на него магнитной силы, так как  $e\mathbf{v}B/eE < 10^{-2}$  ( $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E}$  в волне,  $v$  скорость электрона в атоме):

$$m \ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + e\vec{E}e^{i\omega t}, \quad (10)$$

где  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$  - поле падающей волны;  $e$  – заряд электрона;  $k$  - коэффициент квазиупругой силы;  $m$  – масса электрона. При отклонении электрона от положения равновесия на величину  $\vec{r}$  у молекулы возникает электрический дипольный момент  $\vec{p} = e\vec{r}$ . Заменяв в уравнении движения электрона  $\vec{r}$  на  $\vec{p}/e$  получим уравнение для дипольного момента

$$\ddot{\vec{p}} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - собственная частота электрического осциллятора. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\vec{p}(t) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}(t), \quad (12)$$

где

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (13)$$

Это решение соответствует установившемуся режиму вынужденных колебаний при пренебрежимо малом затухании.

Согласно определениям (7) и (9), имеем

$$R(\omega) = \frac{1}{3} \frac{N_A e^2}{\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{N_A e^2}{3\epsilon_0 \omega_0^2 (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})} \quad (14)$$

$$K(\omega) = \frac{3}{2} \frac{R(\omega)}{\mu} = \frac{N_A}{\mu} \frac{e^2}{2\epsilon_0 \omega_0^2 (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}$$

Для газов в видимой части спектра  $\omega^2 / \omega_0^2 \approx \omega^{-2}$ , поэтому в соотношениях (14) и (15) можно пренебречь зависимостью от частоты падающей световой волны.

Соотношение (9) применяют при экспериментальном изучении распределения плотности газов в аэродинамических и ударных трубах путём измерения распределения показателя преломления. При этом необходимо располагать экспериментальными значениями постоянной Гладстона-Дейла или молекулярной рефракции. С этой целью проводят измерения показателя преломления газов с помощью интерференционного рефрактометра.

Рассмотрим некоторые положения теории интерференции света – явления, лежащего в основе принципа действия этого прибора. Пусть в момент  $t$  в точку наблюдения приходят две одинаково поляризованные волны с разными частотами:

$$\mathbf{E}_1 = E_{m1} e^{i(\omega t - k_1 z_1 + \beta_1)}, \quad \mathbf{E}_2 = E_{m2} e^{i(\omega t - k_2 z_2 + \beta_2)},$$

где  $E_{m1}$  и  $E_{m2}$  – амплитуды;  $k_{1,2}=(2\pi/\lambda)n_{1,2}$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – начальные фазы колебаний;  $z_1$  и  $z_2$  – расстояния от источников волн до точки наблюдения. По принципу суперпозиции можно вычислить интенсивность света в точке наблюдения:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle. \quad (15)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  – интенсивность, созданная первой и второй волнами соответственно в точке наблюдения;  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle$  – среднее за время наблюдения значение косинуса разности фаз  $\Delta\varphi$  двух волн:

$$\Delta\varphi = (\omega t - k_2 z_2 + \alpha_2) - (\omega t - k_1 z_1 + \alpha_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 z_1 - n_2 z_2) + \Delta\beta, \quad (16)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления среды, в которой распространяются первая и вторая волны соответственно.

Если за время наблюдения разность (16) хаотически меняется в пределах, превосходящих  $2\pi$ , то  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$  и третье слагаемое в (15) исчезает. Если за время наблюдения  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle$  сохраняет постоянное значение (в таком случае две волны называют взаимно когерентными), то интенсивность результирующей волны, по (15), зависит от разности фаз двух складывающихся волн. Такое явление называют интерференцией волн.

Для получения двух взаимно когерентных волн надо один и тот же световой пучок разделить на два, например с помощью зеркал.

Пусть имеются две взаимно когерентные волны, в которых, кроме того,  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 0$ . Тогда по формуле (15) максимум интенсивности будет наблюдаться при

$$\Delta\varphi = 2\pi m,$$

где  $m=0,1,2, \dots$  – порядок интерференции.

По (16) для условия максимума можно записать

$$\Delta = m\lambda, \quad (17)$$

где  $\Delta = n_1 z_1 - n_2 z_2$  – оптическая разность хода лучей.

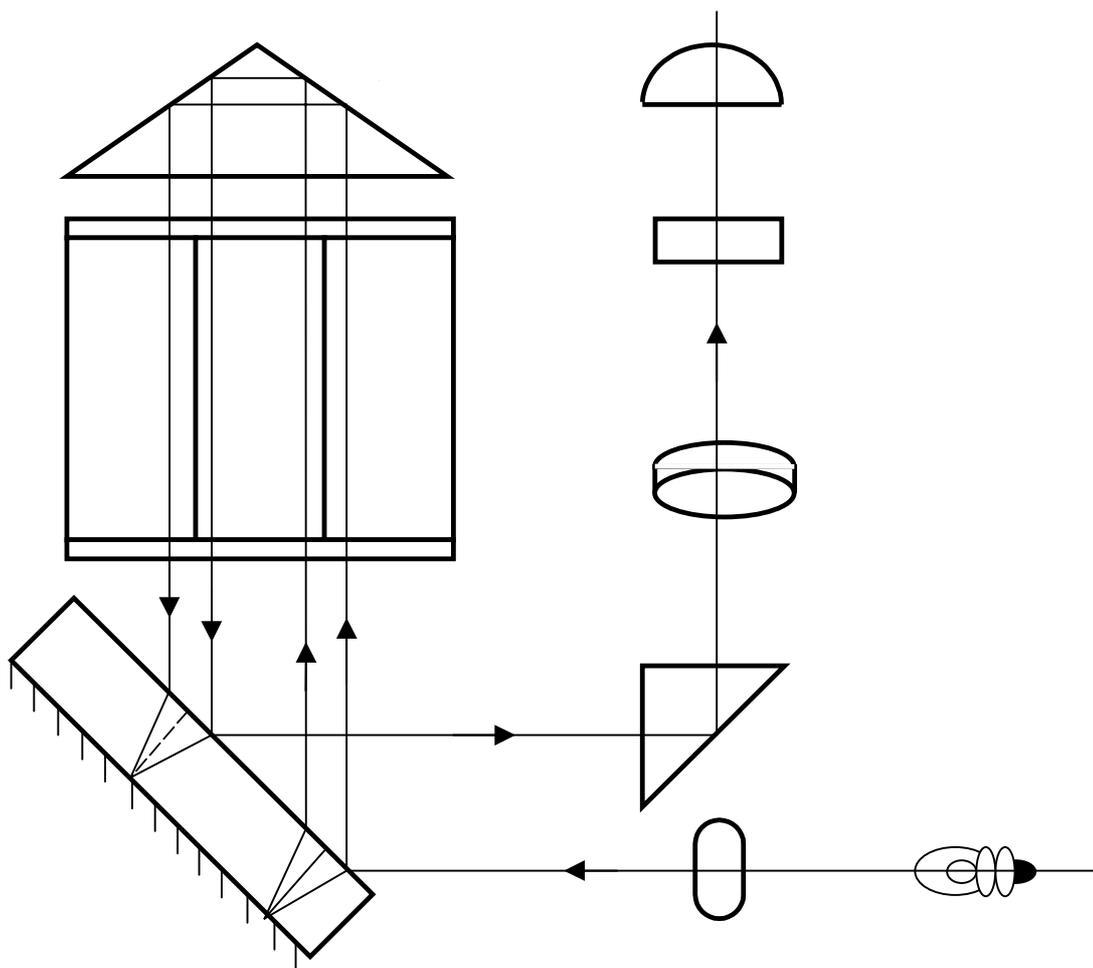
На этом принципе сконструирован интерферометр, используемый в данной работе.

Распределение интенсивности в интерференционной картине, наблюдаемой в зрительную трубу интерферометра, зависит от разности фаз, или оптической разности хода интерферирующих лучей. Эта картина имеет вид чередующихся темных и светлых полос. Световая полоса порядка  $m$  наблюдается при разности хода  $\Delta = m\lambda$ . Представим, что на участке пути длиной  $l$  одного из интерферирующих лучей показатель преломления начнёт увеличиваться и, следовательно, будет увеличиваться оптическая длина пути  $nl$  на этом участке. Появится дополнительная оптическая разность хода интерферирующих лучей  $l\Delta n$  (где  $\Delta n$  – изменение показателя преломления на участке). Теперь на месте  $m$ -й полосы возникает полоса  $m'$ , для которой выполняется равенство  $\Delta + l\Delta n = m'\lambda$ . Если дополнительная разность хода  $l\Delta n = m\lambda$ , то  $m' = m + q$ , т.е. вся интерференционная картина сместится на  $q$  полос. Определив, на сколько полос сместилась интерференционная картина (т.е. целое число  $q$ ), можно вычислить изменение показателя преломления  $\Delta n = q\lambda/l$ . В данной работе изменение показателя преломления  $\Delta n$  возникает при изменении давления воздуха на  $\Delta p$ .

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.

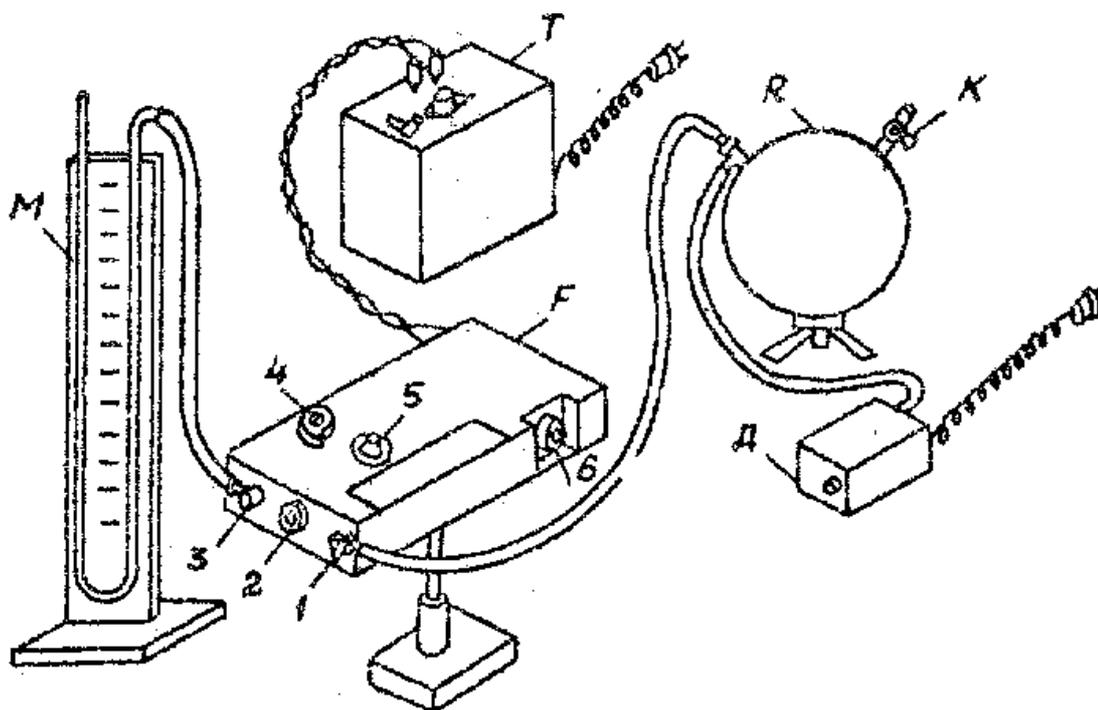
### Ознакомление со схемой интерферометра.

Принципиальная схема устройства интерферометра, используемого в работе, представлена на рис. 1.



Свет от источника  $S$  проходит через конденсорную линзу  $KL$  и параллельным пучком падает на зеркало  $Z$ , где раздваивается на интерферирующие лучи. Первый луч отражается верхней гранью зеркала  $Z$ , проходит через камеры  $A$  и  $C$ , заполненные воздухом при атмосферном давлении. Второй луч, отразившись от нижней грани зеркала  $Z$ , дважды проходит через камеру  $B$ , давление в которой может отличаться от атмосферного. Прохождение света через камеры в обратном направлении осуществляется призмой полного внутреннего отражения  $P$ . Камеры  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют одинаковую длину и закрыты прозрачными плоскопараллельными пластинами  $Z$ . Оба пучка света, выйдя из камер  $B$  и  $C$ , вновь попадают на зеркало  $Z$  и, отразившись от его внутренней и нижней граней, сходятся в один световой пучок, который, пройдя через призму  $P_1$ , отклоняется под прямым углом и попадает в объектив  $OB$  зрительной трубы. Выйдя из объектива  $OB$ , пучок света проходит через щелевую диафрагму  $\text{Ш}$  с отчетной шкалой в окуляр  $OK$ , через который наблюдается интерференционная картина. Верхняя линза объектива выполнена подвижной, что даёт возможность перемещать интерференционную картину вдоль шкалы и устанавливать её в нулевое положение.

Экспериментальная установка (рис. 2) состоит из интерферометра  $F$ , манометра  $M$ , микрокомпрессора  $Д$  и ресивера  $R$ , а также трансформатора  $T$ . На корпусе интерферометра размещены: штуцер 1, к которому подключен нагнетающий в полость  $B$  воздух; окуляр 2; штуцер 3, на который надевается трубка, соединённая водяным манометром для регистрации давления воздуха в полости  $B$ ; микровинт 5 для перемещения интерференционной картины в поле зрения окуляра; переключатель 4 для перемещения воздушной камеры в положение «И» и «К» (см. на самом приборе) («И» – измерение, «К» – контроль; эти надписи нанесены на корпусе прибора); патрон с лампой 6.



Если закрыть кран  $K$  (см. рис. 2), то давление в ресивере и, одновременно, в полости  $B$  (см. рис. 1) интерферометра будет возрастать. Это приведет к изменению показателя преломления воздуха в полости  $B$  и, следовательно, к сдвигу интерференционной картины, наблюдаемой через окуляр зрительной трубы.

**Внимание!** Кран ресивера можно закрывать только на время нагнетания воздуха в полость до давления, не превышающего того, при котором жидкость может вылиться из манометра  $M$  (см. рис. 2). В остальное время кран должен быть открытым.

#### Порядок выполнения эксперимента.

1. Включить установку в сеть.
2. Открыть кран  $K$  (см. рис. 2) ресивера, привести давление воздуха в камере  $B$  интерферометра к атмосферному. В этом случае вода в обоих коленах манометра  $M$  не должна иметь разности уровней.
3. Вращением окуляра зрительной трубы добиться максимальной чёткости видимой картины и изображения шкалы.
4. Установить интерференционную картину в нулевое положение. Для этого переключатель 4 поставить в положение «К» и, наблюдая в окуляр за положением интерференционной картины, медленно вращать микровинт 5 до совмещения чёрной полосы интерференционной картины с нулевой отметкой шкалы. Поставить переключатель 4 в положение «И».

Все дальнейшие измерения проводить только при положении переключателя 4 на «И».

5. Включить микро компрессор в сеть. **При этом кран ресивера должен быть открытым.**

6. Постепенно закрывая кран К, добиться такой малой скорости смещения интерференционной картины, при которой можно успевать снимать и записывать показания  $h_1$  и  $h_2$  манометра, соответствующие сдвигу картины на полполосы, т.е. при  $q$ , равном 0.5; 1.0; 1.5 и т.д. Смещение картины на полполосы означает, что в том месте, где была середина светлой полосы, появляется середина соседней с ней тёмной полосы.

Значения  $q$  и соответствующие каждому  $q$  средние значения  $h_1$  и  $h_2$  занести в таблицу.

$l = \dots$ см, $\lambda = \dots$ мкм, $T = \dots$ °С						
$q$	$h_2$ , мм	$h_1$ , мм	$\Delta p =  h_2 - h_1 $ , мм	$\Delta p$ , Па	$\Delta \rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta n$

7. По формуле  $l\Delta n = q\lambda$  определить изменение показателя преломления  $\Delta n$  для каждого избыточного давления  $\Delta p = |h_2 - h_1|$  в полости В интерферометра. Результаты занести в таблицу.

8. По формуле  $\Delta \rho = \Delta p \mu / RT$  найти изменение плотности воздуха для каждого избыточного давления  $\Delta p = |h_2 - h_1|$ . Принять при этом для молекулярной массы воздуха  $\mu = 28.96 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Результаты вычислений занести в таблицу.

9. Построить график зависимости  $\Delta n = f(\Delta p)$ . Из наклона графика найти среднее значение коэффициента пропорциональности  $K = \Delta n / \Delta p$ ,  $K = K(\omega)$ , после чего с помощью формулы (15) вычислить значение  $R = R(\omega)$ .

Анализ и обработка результатов эксперимента методом статического корреляционного анализа.

Проверка формулы Гладстона – Дейла. В соответствии с формулой (9), можно написать

$$\Delta n = K \Delta p. \quad (18)$$

Обозначая  $\Delta p$  через  $x$ , а  $\Delta n$  через  $y$ , зависимость (18) можно представить в виде

$$y = a_1 x. \quad (19)$$

Таким образом, для подтверждения соотношения Гладстона – Дейла необходимо, чтобы на основании данных опыта подтвердилась гипотеза о линейной зависимости  $x$  и  $y$ . С этой целью по результатам измерений вычисляют основные статистические показатели эксперимента:

а) среднеквадратичные отклонения

$$S_x = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\vec{x} - x)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad S_y = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\vec{y} - y)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $N$  – число измерений;  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  – средние значения  $\Delta p$  и  $\Delta n$  по всем опытам;  $x_i$  и  $y_i$  – их численные значения в  $i$ -ом опыте;

б) коэффициент ковариаций

$$K_{x,y} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\vec{x} - x_i)(\vec{y} - y_i); \quad (20)$$

в) коэффициент корреляции

$$r = K_{x,y} / S_x S_y.$$

Если коэффициент корреляции удовлетворяет неравенству

$$|r| \sqrt{N-2} / \sqrt{1-r^2} > t_{\alpha}(f), \quad (21)$$

то с вероятностью  $1 - \alpha$  можно считать, что  $x$  и  $y$  действительно связаны линейной зависимостью. Значения  $t_\alpha(f)$ , т.е. квантили распределения Стьюдента, для различных уровней зависимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f = N - 2$ , приведены в таблице, имеющейся в лаборатории. По этой таблице и критерию (21) следует проводить гипотезу о линейной зависимости между показателем преломления и плотностью воздуха при  $\alpha = 0.1$ .

Принимая на основании этой проверки уравнение регрессии в виде линейной связи

$$y_x = a_0 + a_1 x, \quad (22)$$

рассчитываем параметр  $a_1$  по соотношению  $a_1 = K_{x,y} / S_x^2$  и проверяем гипотезу о равенстве нулю параметра  $a_0$ , пользуясь критерием

$$\left( \bar{y} - K_{x,y} \bar{x} / S_x^2 \right) S_{y,x} \sqrt{\frac{1}{N} - \frac{\bar{x}^2}{(N-1)S_x^2}} \leq t_\alpha(f), \quad (23)$$

где  $S_{yx}$  – выборочное стандартное отклонение  $y_i$  от условного математического ожидания:

$$S_{yx} = \left[ \frac{N-1}{N-2} (S_y^2 - K_{xy}^2 / S_x^2) \right]^{1/2}.$$

Если наряду с критерием (21) удовлетворяется и критерий (23), то справедливость соотношения Гладстона – Дейла экспериментально подтверждается.

Запишите в отчёте, подтверждено ли в эксперименте соотношение Гладстона – Дейла.

Вычисление постоянной Гладстона-Дейла для воздуха и оценка её погрешности. Из сопоставления (18) и (22) видно, что постоянная  $K$  равна уже вычисленному коэффициенту регрессии. При оценке погрешности постоянной  $K$  воспользуемся выражением для выборочного стандартного отклонения  $S_{a_1}$ , параметра  $a_1$ :

$$S_{a_1} = S_{yx} \sqrt{(N-1)S_x^2},$$

откуда погрешность  $\Delta K$  вычисляется по формуле

$$\Delta K = S_{a_1} t_\alpha(f).$$

Результат следует представить в виде

$$K = \dots \pm \dots \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Этот результат сравнить с результатом, полученным графическим методом.

Вычисление показателя преломления воздуха при нормальных условиях и оценка его погрешности. Показатель преломления воздуха вычисляется по соотношению Гладстона – Дейла  $n-1 = K\rho$  подстановкой в это выражение полученного в данной работе значения  $K$  и плотности воздуха при нормальных условиях  $\rho_0 = 1.293 \text{ кг/м}^3$ .

Погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta n = \sqrt{\left( \frac{\partial n}{\partial K} \right)^2 (\Delta K)^2 + \left( \frac{t_\alpha(\infty)}{3} \right)^2 (\delta n_{\text{приб}})^2},$$

где  $\delta n_{\text{приб}} = 2 \cdot 10^{-7}$  – приборная погрешность интерферометра;  $\partial n / \partial K = \rho_0$ .

Результат следует представить в виде

$$n = \dots \pm \dots$$

#### Контрольные вопросы.

1. Какие условия необходимы для наблюдения интерференции света?
2. Как связан показатель преломления газов с плотностью?
3. Почему при изменении давления воздуха в камере (см. рис. 1) происходит сдвиг интерференционных полос?

4. По какому закону изменяется интенсивность света в функции расстояния по мере распространения волны в поглощающем веществе?
5. Противоречит ли вид дисперсионной классической теории представлениям современной квантовой физики?
6. Как связана постоянная Гладстона – Дейла для смеси газов с процентным содержанием компонентов смеси?
7. Подтверждаются ли Вашим экспериментом соотношения Гладстона – Дейла с вероятностью 0.9? Подтверждается ли с вероятностью 0.999?

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. М.: 1988. 496 с.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
3. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высш. шк., 1985. 351 с.
4. Еркович С.А. Применение корреляционного и регрессионного анализа в физическом практикуме. М.: ВЗМИ, 1983. 12 с.
5. Еркович С.П. Методические указания по применению регрессионного и корреляционного анализа для обработки результатов измерений в физическом практикуме. М.: МВТУ, 1984. 9 с.